CONCOURS 1976

OPTION M

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

DURÉE : 4 heures

Les parties I *et* II *sont indépendantes entre elles.*

Préambule : Dans tout le problème on considère l'espace affine euclidien muni du repère orthonormé $R_0 : (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz})$ de vecteurs unitaires $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Aux coordonnées cartésiennes (x, y, z) on associe les coordonnées semi-polaires usuelles (ρ, θ, z), avec $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$.

On considère l'ellipse $(\mathcal{E}_0)$ $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ay = 0 \quad \text{où } a > 0 \\ y = z \end{cases}$

et la surface conoïde (S) engendrée par les droites G parallèles au plan xOy, s'appuyant sur Oz et sur l'ellipse $(\mathcal{E}_0)$.

a. Montrer que l'équation cartésienne du conoïde (S) est :

$$z = \frac{2ay^2}{x^2 + y^2}$$

b. Donner une représentation paramétrique de (S) en utilisant les paramètres ρ et θ.

I

1° *a.* Donner une équation cartésienne du plan T (θ, ρ) tangent à (S) en un point de (S) de paramètres (θ, ρ).

.../...

b. Lorsque $\theta \neq 0 \left(\mathrm{mod}\ \frac{\pi}{2}\right)$, prouver que l'intersection de T (θ, ρ) et de (S) est constituée par une génératrice G_θ et une ellipse E, dont on précisera la projection orthogonale sur xOy. Prouver que la longueur du demi petit axe de E est : $\left|\frac{\rho}{2 \sin 2\theta}\right|$.

c. Cas particulier $\theta = 0 \left(\mathrm{mod}\ \frac{\pi}{2}\right)$. Quels sont alors les plans tangents? Quelles sont les intersections de (S) avec les plans passant par Ox ou par la génératrice : $[x = 0 ;\ z = 2a]$?

2° Trouver, en fonction de θ paramètre d'une génératrice G_θ, les équations des deux plans P_θ passant par G_θ et recoupant S selon une ellipse E_θ ayant un demi *petit* axe de longueur donnée : $a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3° *a.* Donner en coordonnées semi-polaires, les équations de la courbe (C), ensemble des points M de contact des plans P_θ précédents avec S.

b. Construire les projections orthogonales de (C) sur les 3 plans de coordonnées.

c. Calculer, en fonction de θ, le rayon de courbure $\mathcal{R}$ de (C), puis le rayon de torsion $\mathcal{T}$ de (C). (Il sera commode de faire les calculs en coordonnées semi-polaires.)

4° *a.* Trouver l'ensemble des centres ω des ellipses (E_θ).

b. Trouver l'ensemble des sommets B et B′ des petits axes des (E_θ), et l'ensemble des sommets A et A′ des grands axes des (E_θ).

c. Démontrer que toutes les ellipses (E_θ) sont de même grandeur.

d. Trouver l'ensemble des foyers des ellipses (E_θ).

5° On considère le repère (R) lié à l'ellipse (E_θ), orthonormé direct $(\omega\vec{X}, \omega\vec{Y}, \omega\vec{Z})$ tel que $(\omega\vec{X}, \omega\vec{Y})$ est le plan P_θ, ω le centre de E_θ et $\overrightarrow{\omega X}$ support de son petit axe. On note les vecteurs unitaires de R : $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$.

a. Écrire la matrice de passage de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.

b. θ est une fonction dérivable du temps, croissante de 0 à π. R est un solide en mouvement par rapport à R_0. Déterminer $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation instantané de ce mouvement. On exprimera $\vec{\Omega}$ dans le repère R_0 et dans le repère R.

c. Déterminer Δ l'axe de vissage instantané du mouvement. Préciser la surface (Σ_0) engendrée par Δ dans R_0 et la surface (Σ) engendrée par Δ dans R.

II

1° (S) est le conoïde défini dans le préambule et G_θ la génératrice de S passant par le point A, paramètre θ, de l'ellipse $\mathcal{E}_0$ $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ay = 0. \\ y = z. \end{cases}$

On considère Q_θ le plan passant par G_θ et coupant la droite D : $[x = 0 ;\ y = 2a]$ en un point P tel que la norme $\| \vec{AP} \|$ soit $2a$, constante et la cote de P supérieure ou égale à celle de A.

Écrire une équation cartésienne de Q_θ en fonction de θ.

2° On considère le repère R orthonormé direct $(A\vec{X}, \vec{AY}, \vec{AZ})$ tel que $(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AY})$ est le plan Q_θ, $A\vec{X}$ a pour support G_θ. On note les vecteurs unitaires de R : $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. θ est une fonction dérivable du temps, croissante de 0 à π. Le solide R est entraîné par le mouvement de AP par rapport à R_0. (A et P sont donc fixes par rapport à R.)

a. Trouver $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation instantané du mouvement de R par rapport à R_0. On pourra utiliser le repère intermédiaire R_1 : $(\vec{Ox_1}, \vec{Oy_1}, \vec{Oz_1})$ de vecteurs unitaires $(\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$ déduit de R par rotation d'angle θ autour de Oz.

b. Écrire la matrice de passage de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à $(\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$, puis la matrice de passage de $(\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$ à $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.

3° *a.* Soit M un point lié à R. Trouver $\vec{V}(M)$ le vecteur vitesse de M, par rapport à R_0; on exprimera les composantes de $\vec{V}(M)$ dans la base de R_1 en fonction des coordonnées de M dans R_1.

b. Déterminer dans R_1, Δ, l'axe de vissage instantané du mouvement de R par rapport à R_0, en trouvant les équations des plans projetant Δ sur les plans de coordonnées de R_1.

4° En utilisant les matrices de passage définies au 2° *b.*, donner les équations de Δ dans R_0 et dans R.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail